

На правах рукописи

ШИГАБУТДИНОВ АЙРАТ ФЕЛИКСОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
ТОНКОСТЕННЫХ И СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ 2004

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Государственного
образовательного учреждения
высшего профессионального образования
“Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина”

Научные руководители: Доктор физико-математических наук, профессор
Ю.П. Жигалко

Доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Голованов

Официальные оппоненты: Зав. каф. общей математики КГУ,
д.ф.м.н., профессор Н.Г. Гурьянов

Зав. каф. теоретической механики и
сопротивления материалов КГТУ,
д.ф.м.н., профессор М.Н. Серазутдинов

Ведущая организация Институт механики и машиностроения КазНЦ
РАН

Защита состоится “ 24 ” июня 2004 г. в 14 ч. 30 мин. в ауд. Физ. 2 на
заседании диссертационного совета Д 212.081.11 по защите диссертации на
соискание учёной степени доктора физико-математических наук по механике
при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань,
ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
им. Н.И. Лобачевского КГУ

Автореферат разослан “ _____ ” 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
Кандидат физ.-мат. наук, доцент

А.А. Саченков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию динамического поведения тонкостенных и стержневых конструкций произвольной геометрии. Такие задачи являются сложными начально-краевыми задачами и часто требуют применения численных методов.

Результаты исследований поведения тонкостенных и стержневых конструкций численными методами опубликованы в работах Абросимова Н.А., Баженова В.Г., Вольмира А.С., Гордиенко Б.А., Боровкова А.И., Трещева А.А., Старовойтова Э.И., Коробейникова С.Н., Григорьева В.Г., Якушева В.Л., Косицына С.Б., Кибеца А.И., Корнишина М.С., Крысько В.А., Ломунова В.К., Чекмарёва Д.Т., Андреева Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д., Александрова А.В., Лашеникова Б.Я., Шапошникова Н.Н., Бублика Б.Н., Вайнберга Д.Б., Воробьёва Ю.С., Голованова А.И., Якупова Н.М., Серазутдинова М.Н., Богдановича А.Е., Григолюка Э.И., Шалашилина В.И., Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Мукоеда А.П., Постнова В.А., Мяченкова В.И., Григорьева И.В., Образцова И.Ф., Онанова Р.М., Савельева Л.М., Хазанова Х.С., Победри Б.Е., Рикардса Р.Б., Савулы Я.Г., Флейшмана Н.П., Сахарова А.С., Филиппова А.П., Кохманюка А.П., Янютин Е.Г., Бате К., Вилсона Е., Галлагера Р., Моргана К., Зенкевича О., Норри Д., Ж. Де Фриза, Одена Дж., Сегерлинда Л., Фикса Дж.

Методы решения задач динамического выпучивания тонкостенных конструкций тесно связаны с используемыми моделями теории оболочек, которые можно найти в фундаментальных работах Абовского Н.П., Андреева Н.П., Деруги А.П., Аксельрада Э.Л., Болотина В.В., Новичкова Ю.Н., Власова В.З., Вольмира А.С., Галимова К.З., Паймушина В.Н., Гольденвейзера А.Л., Григолюка Э.И., Горшкова А.Г., Коноплёва Ю.Г., Чулкова П.П., Гуляева В.И., Гузя А.Н., Муштари Х.М., Пикуля В.В., Новожилова В.В., Рекача В.Г., Кривошапко С.Н., Терегулова И.Г., Тимошенко С.П., Иванова В.А., Филина А.П., Черных К. Ф. По расчёту стержней и стержневых систем опубликованы исследования Бычкова Д.В., Воробьёва Ю.С., Розина Л.А., Светлицкого В.А., Филина А.П., Шулькина Ю.Б.

Однако потребности практики, наукоемких технологий, требования к конкурентной способности отечественных программных продуктов делают актуальными дальнейшее развитие методов исследования динамических характеристик тонкостенных и стержневых конструкций, совершенствование и углубление теоретической базы расчетных схем с последующим развитием и совершенствованием отечественных пакетов прикладных программ. На актуальность данного направления исследований указывается в решениях всех Всероссийских конференций по теоретической и прикладной механике. Кроме того, актуальность подтверждается имеющимся Актом внедрения результатов

исследований и Грантом Министерства образования России (Рег. в КГУ-СПГА-17).

Цель диссертационной работы. Разработка эффективной конечно-элементной методики определения динамических характеристик сложных стержневых и тонкостенных конструкций и решение на этой базе новых практически значимых задач. Разработка численно-аналитического метода решения задач о продольно-поперечном движении упругих стержней и цилиндрических оболочек при продольном импульсном воздействии силой.

Научная новизна результатов.

1. Разработаны конечно-элементные модели динамического расчёта произвольных стержневых и тонкостенных конструкций. Дана реализация этих моделей в виде расчётной методики и пакета прикладных программ. Указанная методика позволяет исследовать динамические характеристики тонкостенных и стержневых конструкций произвольной геометрии при свободных и вынужденных колебаниях.
2. С использованием разработанной методики решены новые задачи динамики для пространственных тонкостенных и стержневых конструкций.
3. Разработан численно-аналитический метод расчёта стержней и цилиндрических оболочек с учётом геометрической нелинейности при продольном импульсном нагружении и решены новые задачи.

Достоверность основных научных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием предлагаемых методик расчёта, использованием признанных в литературе дифференциальных уравнений продольно-поперечных движений стержней и цилиндрических оболочек, сравнением полученных решений для тестовых примеров с известными из литературы аналитическими и экспериментальными данными, совпадением решений, полученных на разных конечно-элементных и конечно-разностных сетках.

На защиту выносятся:

1. Конечно-элементная реализация динамического расчёта произвольных стержневых и тонкостенных конструкций.
2. Исследование динамических характеристик с определением частот и форм собственных колебаний пространственных стержневых и тонкостенных конструкций МКЭ при свободных колебаниях.
3. Исследование динамических характеристик пространственных тонкостенных конструкций МКЭ при вынужденных колебаниях.
4. Разработка численно-аналитического метода расчёта стержней и цилиндрических оболочек при продольном импульсном нагружении. с учётом геометрической нелинейности.
5. Решение новых задач определения динамических характеристик тонкостенных и стержневых конструкций.

Практическая значимость работы состоит в том, что она позволяет, пользуясь отечественным расчетным комплексом, исследовать частоты и формы свободных колебаний тонкостенных и стержневых конструкций, применяемых в строительстве и машиностроении. Разработанный численно-аналитический метод исследования движений стержней и цилиндрических оболочек при продольных воздействиях ударного типа делает расчет более наглядным и привлекательным для проектировщиков. Материалы диссертации нашли отражение в учебном пособии, которое в 2003/2004 учебном году внедрено в учебный процесс на кафедре теоретической механики Казанского государственного университета для выполнения дипломных работ. Результаты расчёта и методика исследования частот и форм свободных колебаний введены в действие на кафедре металлических конструкций и испытаний сооружений Казанской государственной архитектурно-строительной академии, о чем имеется акт.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались: на итоговых студенческих конференциях (Казань, КГУ, 2000-2002); на Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам (Москва, МГУ, 2000); на Международной молодёжной конференции (Н. Челны, 2000); на Международной конференции “Актуальные проблемы механики оболочек” (Казань, 2000); на VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь 2001); на Международной конференции “Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике” (Минск 2001); на конференциях “Лобачевские чтения” (Казань 2001-2003); на республиканском конкурсе научных работ среди студентов и аспирантов на соискание премии им. Н.И. Лобачевского (Казань 2002); на VIII Четаевской международной конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” (Казань 2002); на XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (Н.Новгород, 2002); на XV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции (Казань, 2003); на конференциях “Advanced Problems in Mechanics” (St. Petersburg, 2002, 2003); на Международной конференции BEM-FEM (Санкт-Петербург, 2003); на НТК Казанской государственной архитектурно-строительной академии (1997-2004); на итоговых конференциях КГУ (2003, 2004); на городских научных семинарах по теории пластин и оболочек КГУ (2002, 2003); на городском научно-методическом семинаре кафедр теоретической механики (Казань, 2003); на итоговой научной конференции 2003 г. КНЦ РАН; на X-ом Международном симпозиуме “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”, МАИ, Ярополец, 2004.

В целом диссертация докладывалась и получила одобрение на расширенном семинаре кафедры теоретической механики и лаборатории механики оболочек НИИММ им. Н.Г. Чеботарёва Казанского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 22 научные работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации - 193 страницы, включая 103 рисунка, 20 таблиц и список литературы из 212 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении приводится обзор работ по теме диссертации, обоснована актуальность темы, сформулированы цель исследования, положения, выносимые на защиту.

В первом параграфе первой главы приводится разрешающее уравнение динамики МКЭ, для этого используется принцип виртуальных перемещений в сочетании с принципом Даламбера.

$$\iiint_{\Omega} (\sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik} + \rho \ddot{\vec{v}} \cdot \delta \vec{v}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{Q} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \iint_A \vec{P} \cdot \delta \vec{v} dA. \quad (1)$$

где σ^{ik} , ε_{ik} - тензоры напряжений и деформаций соответственно, \vec{Q} , \vec{P} - распределённые объёмная и поверхностная нагрузки, \vec{v} - вектор перемещений, ρ - плотность. Далее обсуждаются особенности и методы решения задачи на собственные и вынужденные колебания конструкций.

Во втором параграфе первой главы описывается трёхузловой изопараметрический конечный элемент бруса (рис. 1). Положение произвольной точки стержня определяется компонентами R_1 , R_2 её радиус-вектора в этом сечении, перемещением осевой линии вектором \vec{u} и вращением сечения вектором $\vec{\theta}$. В результате перемещение каждой точки сечения стержня может быть представлено в виде:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\theta} \times \vec{R}, \text{ где } \vec{R} = R_1 \vec{V}_1 + R_2 \vec{V}_2. \quad (2)$$

Здесь:

$$\vec{u} = u_1 \vec{V}_1 + u_2 \vec{V}_2 + u_3 \vec{V}_3; \quad (3) \quad \vec{\theta} = \theta_1 \vec{V}_1 + \theta_2 \vec{V}_2 + \theta_3 \vec{V}_3, \quad (4)$$

где u_1 , u_2 , u_3 - проекции вектора перемещений на оси локальной подвижной системы координат, θ_1 , θ_2 , θ_3 - углы поворотов относительно ортов \vec{V}_1 , \vec{V}_2 , \vec{V}_3 соответственно. \vec{V}_3 направлен по касательной к осевой линии балки, а орты \vec{V}_1 , \vec{V}_2 лежат в плоскости поперечного сечения и совпадают с его главными

центрными осями. Деформации в локальной системе координат запишутся в следующем виде:

$$\varepsilon = \vec{V}_3 \cdot \vec{u}'; \chi_i = \vec{V}_i \cdot \vec{\theta}'; \gamma_i = \vec{V}_i \cdot (\vec{u}' + \vec{V}_3 \times \vec{\theta}'); e = \vec{V}_3 \cdot \vec{\theta}', i=1, 2, (5)$$

где ' – означает дифференцирование по безразмерной в пределах элемента координате ξ ($-1 \leq \xi \leq +1$). Возникающие усилия и моменты принимаются в виде:

$$N = EF\varepsilon; Q_i = GF\gamma_i; M_i = EJ_i\chi_i; i=1, 2; H = GJ_{кр}e. (6)$$

Здесь E, G – модули упругости и сдвига, $F, J_1, J_2, J_{кр}$ – площадь поперечного сечения и моменты инерции (осевые и при свободном кручении). Внутри КЭ используются аппроксимации одного порядка для геометрии и перемещений в виде квадратичных полиномов. Для избежания явления потери точности при $\sqrt{I^2/F} \gg 1$ (эффект сдвигового заклипания) используется процедура двойной аппроксимации деформаций, где l – длина КЭ. Для построения матрицы масс КЭ распишем с учётом (2) выражение для второго слагаемого δT в уравнении (1). В локальной системе координат оно примет вид:

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_{-1}^{+1} \rho \left(\sum_{m=1}^3 F_m N_m(\xi) \right) \ddot{u} \cdot \delta \ddot{u} A(\xi) d\xi + \int_{-1}^{+1} [\rho \ddot{\theta}_3 \delta \theta_3 \left(\sum_{m=1}^3 J_{p,m} N_m(\xi) \right) + \\ & + \rho \ddot{\theta}_1 \delta \theta_1 \left(\sum_{m=1}^3 J_{1,m} N_m(\xi) \right) + \rho \ddot{\theta}_2 \delta \theta_2 \left(\sum_{m=1}^3 J_{2,m} N_m(\xi) \right)] A(\xi) d\xi, \end{aligned} (7)$$

где $J_{p,m} = J_{1,m} + J_{2,m}$ – полярный момент инерции сечения стержня в m -ом узле. Переход от локальной к глобальной системе координат осуществляется через матрицу перехода. Далее приходим к выражению

$$\delta T = \{\ddot{q}_i\} [M_{ij}] \{\delta q_j\}, (8) \text{ где } \{q_i\}^T = \{v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\} (9)$$

вектор узловых перемещений в i -ом узле в глобальной системе координат, а блоки матрицы масс, записанной в глобальной системе координат примут вид:

$$[M_{ij}] = \rho \sum_{n=1}^3 \begin{bmatrix} [S_i]^T [I_1] [S_j] & 0 \\ 0 & [S_i]^T [I_2] [S_j] \end{bmatrix} N_i(\xi_n) N_j(\xi_n) A(\xi_n) \omega_n; (10)$$

здесь

$$[I_1] = \sum_{m=1}^3 F_m N_m(\xi) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [I_2] = \sum_{m=1}^3 N_m(\xi) \begin{bmatrix} J_{1,m} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2,m} & 0 \\ 0 & 0 & J_{p,m} \end{bmatrix}, (11)$$

$[S_i]$ -матрица перехода от локальной к глобальной системе координат, ω_n -весовые множители, суммирование по n - замена аналитического интегрирования численным.

Третий параграф первой главы посвящён построению конечно-элементной схемы нахождения динамических характеристик тонкостенных конструкций на основе оболочечного КЭ. За основу берётся 9-ти узловой КЭ, схема построения для задач статики которого описана в работах Голованова А.И., Песошина А.В. (рис. 2), каждый элемент представляется в виде искривлённого параллелепипеда в трёхмерном пространстве с линейчатой поверхностью по толщине. Радиус-вектор элемента объёма запишется в виде

$$\vec{r}(\xi, \eta, \varsigma) = \vec{r}_0(\xi, \eta) + \frac{h}{2}\varsigma \vec{V}_3(\xi, \eta); \quad (12)$$

где \vec{r}_0 - радиус-вектор срединной поверхности, h - толщина.

Неизвестных узловых перемещений в каждом узле будет пять: три проекции вектора \vec{u} на оси глобальной системы координат $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ и два угла поворота $\theta_1, \theta_2, \vec{\theta} = \theta_1 \vec{V}_1 + \theta_2 \vec{V}_2$. Вводится локальная система координат ξ, η, ς . При построении матрицы жёсткости исходим из трёхмерных уравнений теории упругости. Стандартным для таких элементов образом учитываются кинематическая гипотеза о прямолинейности и нерастяжимости нормали и статическая гипотеза о малости напряжений обжатия, соотношения упругости берутся в виде формул, соответствующих плосконапряжённому состоянию. Аппроксимации неизвестных функций в пределах элемента вводятся в виде биквадратичного полинома. Для вычисления интегралов по ξ, η используются квадратурные формулы Гаусса-Лежандра 3-го порядка. Для борьбы с явлением потери точности при уменьшении толщины (эффект "запирания") используется специальный приём двойной аппроксимации деформаций. Для блоков матрицы масс получим выражения:

$$[M_{ij}] = \sum_{m,n} ([U_i]^T [U_j] + \frac{h^2}{12} [A_i]^T [A_j]) h \rho a_{mn} \omega_m \omega_n \quad (13)$$

$$[U_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}; [A_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & V_{1x}^{(i)} N_i & V_{2x}^{(i)} N_i \\ 0 & 0 & 0 & V_{1y}^{(i)} N_i & V_{2y}^{(i)} N_i \\ 0 & 0 & 0 & V_{1z}^{(i)} N_i & V_{2z}^{(i)} N_i \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$V_{jx}^{(i)}, V_{jy}^{(i)}, V_{jz}^{(i)}$ - проекции векторов \vec{V}_j в i -ом узле на оси x, y, z глобальной системы координат, N_i - функции формы, a_{mn} -элемент площади, ω_m, ω_n - весовые множители. Так же, как и при построении матрицы

жёсткости идёт суммирование по квадратным точкам. Для решения задач нахождения динамических характеристик стержневых и тонкостенных конструкций МКЭ на базе программных комплексов, созданных Головановым А.И., Бережным Д.В., Песошиным А.В. и др., развиты два самостоятельных пакета прикладных программ (ППП). Описание обоих пакетов находится в первой главе.

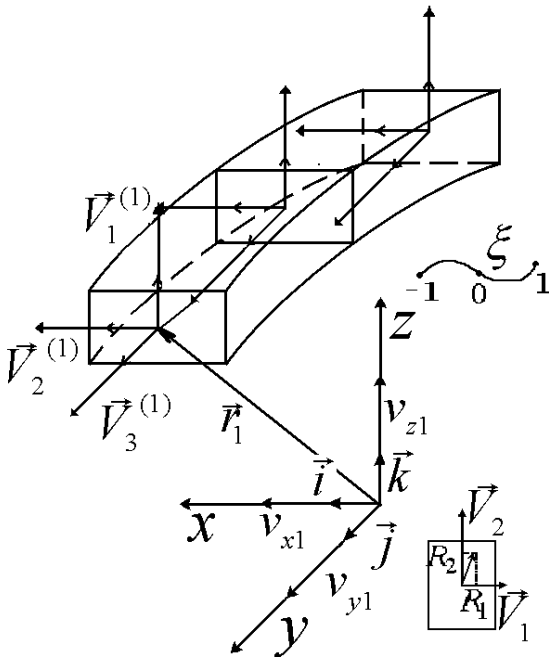


Рис. 1

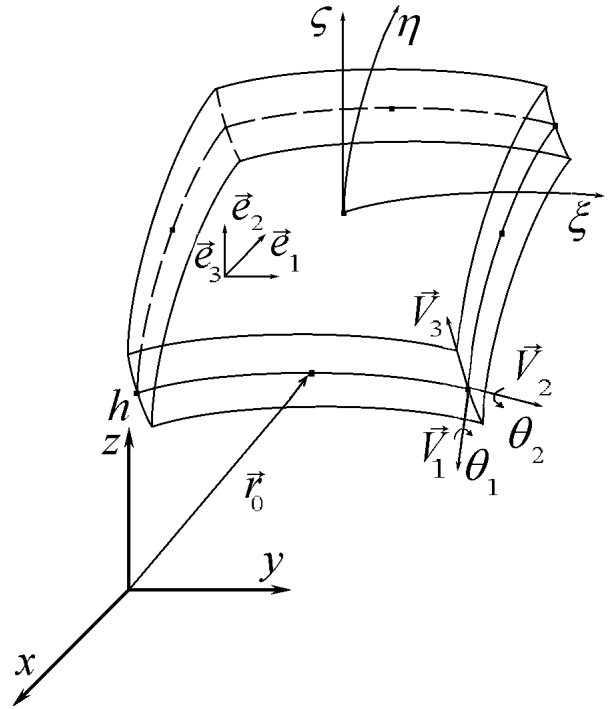


Рис. 2

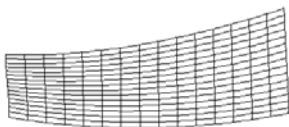
В первом параграфе второй главы приводятся тестовые расчёты на свободные колебания стержневых конструкций. Найденные результаты сравниваются с достоверными данными, полученными из литературы, расчётами в ППП ANSYS. Решены следующие задачи: 1) колебания стержней постоянного сечения с различными условиями закрепления; 2) задача о свободных колебаниях жёстко защемлённого стержня с сосредоточенной массой на конце, с учётом и без учёта плотности стержня; 3) приводятся решения задач определения частот и форм собственных колебаний для перекрытия, состоящего из трёх пересекающихся под прямым углом стержней, с учётом и без учёта расположенных дискретно сосредоточенных масс.

Во втором параграфе второй главы приводятся тестовые расчёты для задач на свободные колебания тонкостенных конструкций на основе оболочечного КЭ. Полученные результаты сравниваются с достоверными аналитическими, экспериментальными и численными данными. В качестве тестовых решается несколько задач: 1) о свободных колебаниях квадратной пластинки с шарнирным закреплением по всем краям, либо жёсткой заделкой с одного края; 2) о свободных колебаниях цилиндрической панели, консольно-закреплённой по криволинейному контуру (Табл. 1), (рис. 3), защемлённой

является нижняя часть панели; 3) о свободных колебаниях цилиндрической оболочки, жёстко закреплённой по торцам (Табл. 2).

Табл. 1.

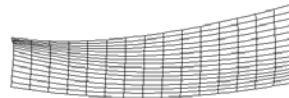
| № тона | Эксперимент, Гц | Используемый конечный элемент, Гц | К.Р. Walker, Гц | Богомолов С.И. и др, Гц |
|--------|-------------------------|-----------------------------------|---|--|
| 1 | 85,60 | 85,58 | 88,60 | 84,90 |
| 2 | 134,50 | 139,58 | 140,90 | 138,20 |
| 3 | 258,90 | 266,00 | 252,60 | 248,70 |
| 4 | 350,60 | 350,31 | 371,50 | 349,90 |
| 5 | 395,20 | 397,91 | 423,20 | 419,10 |
| № тона | G.Lindberg, M.Olson, Гц | G.Lindberg, M.Olson, Гц | Серзутдинов М.Н., Гц | М.А. Bossak, О.С. Zienkiewicz, Гц |
| 1 | 93,50 | 86,60 | 83,40 | 88,30 |
| 2 | 147,60 | 139,20 | 133,80 | 142,80 |
| 3 | 255,10 | 251,30 | 238,10 | 257,60 |
| 4 | 393,10 | 348,60 | 334,00 | 369,20 |
| 5 | 423,50 | 393,40 | 377,00 | 441,80 |
| № тона | Савула Я.Г., Гц | S. Ahmad и др., Гц | L. Hofmeister, D. Evensen, 12-ми узловой КЭ, Гц | L. Hofmeister, D. Evensen, 8-ми узловой КЭ, Гц |
| 1 | 85,10 | 113,00 | 91,00 | 87,00 |
| 2 | 138,00 | 147,00 | 149,00 | 143,00 |
| 3 | 251,70 | 296,00 | 310,00 | 252,00 |
| 4 | 344,80 | 440,00 | 383,00 | 367,00 |
| 5 | 404,90 | 475,00 | 556,00 | 412,00 |



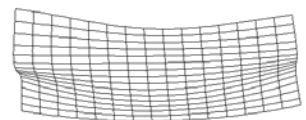
1 ф-ма (85,58 Гц)



5 ф-ма (397,91 Гц)



4 ф-ма (350,31 Гц)



8 ф-ма (759,86 Гц)

Рис. 3.

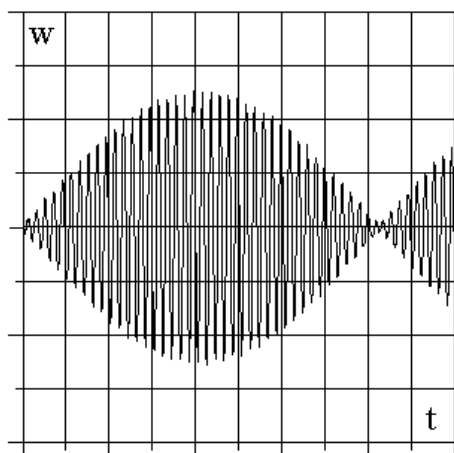
Численные эксперименты с применением метода одновременной итерации подпространств для определения собственных частот и форм колебаний показали эффективность данных элементов, высокую скорость сходимости и устойчивость к накоплению ошибок.

Далее в параграфе решены некоторые новые задачи: Исследуются свободные колебания 1) для жёсткозакреплённой по краю сферической панели; 2) для жёсткозакреплённой по внешнему краю сферической панели с квадратным в плане симметричным вырезом; 3) для жёсткозакреплённого с двух сторон швеллера. Для швеллера приводятся также данные ППП ANSYS по стержневой модели. Совпадение решений удовлетворительное.

Табл. 2.

| Метод вычисления | Число волн по направляющей, n | | | | | | | | |
|---|---------------------------------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $m=1$ | | | | | | | | | |
| Точное решение, Гц | 1140 | 755 | 574 | 533 | 593 | 717 | 881 | 1075 | 1295 |
| По данной работе, Гц | 1134,0 | 746,6 | 555,8 | 509,1 | 572,9 | 698,1 | 864,4 | 1058,9 | 1277,6 |
| Относительная погрешность к точному | 0,52% | 1,1% | 3,3% | 4,4% | 3,4% | 2,6% | 1,9% | 1,9% | 1,3% |
| $m=2$ | | | | | | | | | |
| Точное решение, Гц | 2505 | 1731 | 1272 | 1011 | 898 | 903 | 996 | 1151 | 1348 |
| По данной работе, Гц | - | - | 1269,3 | 997,5 | 878,9 | 882,4 | 977,2 | 1132,5 | 1330,2 |
| Относительная погрешность к точному | - | - | 0,2% | 1,3% | 2% | 2,2% | 1,8% | 1,6% | 1,3% |

В третьем параграфе второй главы приводятся тесты для задачи на



вынужденные колебания оболочек. **1.** Решается задача о вынужденных колебаниях квадратной пластинки жёстко закреплённой с одной стороны под действием равномернораспределённой поверхностной нагрузки изменяющейся во времени по гармоническому закону. Получено биение (см. Рис. 4). Алгоритм адекватно описывает физический процесс. **2.** Рассматривается задача о мгновенном нагружении равномерным давлением жёстко закреплённой по краям сферической панели,

Рис. 4. получено удовлетворительное совпадение с известными численными результатами.

В четвёртом параграфе второй главы приводится расчёт на основе КЭ бруса и на основе КЭ оболочки задачи на собственные колебания для тонкой узкой полосы прямоугольного поперечного сечения. Эта задача является связующей между построенными конечно-элементными моделями. Совпадение по результатам удовлетворительное.

В пятом параграфе второй главы построенные и протестированные конечно-элементные модели определения динамических характеристик тонкостенных и стержневых конструкций распространяются на реальные, практически важные задачи для сложных технологических сооружений.

Задача I. Нахождение частот и форм собственных колебаний рекламного щита на основе оболочечного КЭ (Рис. 5). Каркас конструкции собран из профилей корытного сечения, учитывается переменность толщины конструкции. Стойки жёстко заделаны. **Задача II.** Расчёт на собственные колебания рекламного щита на основе КЭ бруса (рис. 6). Стойки представляют из себя стальные стержни коробчатого сечения. Одним концом они жёстко заделаны в фундамент, а другим крепятся к поперечной хребтовой балке щита. Каркас полезной площади собран из швеллеров. **Задача III.** Расчёт на собственные колебания башни Шухова по стержневой модели (рис. 7), состоящей из десяти стержневых конструкций, каждая из которых составлена из 12 образующих одного семейства некоторого однополостного гиперboloида вращения. Полученные конструкции в форме гиперboloидов соединяются между собой посредством стержневых колец.

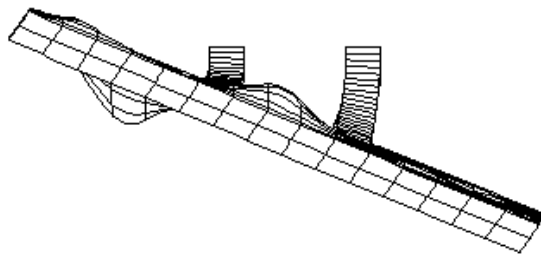


Рис. 5 (7-я форма. (12,87 Гц)

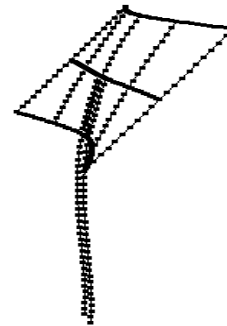


Рис. 6. 8-я форма (13,47 Гц)

1-я форма. (0,00095 Гц) 3-я форма. (0,00882 Гц) 4-я форма. (0,01742 Гц) 9-я форма. (0,0511 Гц)

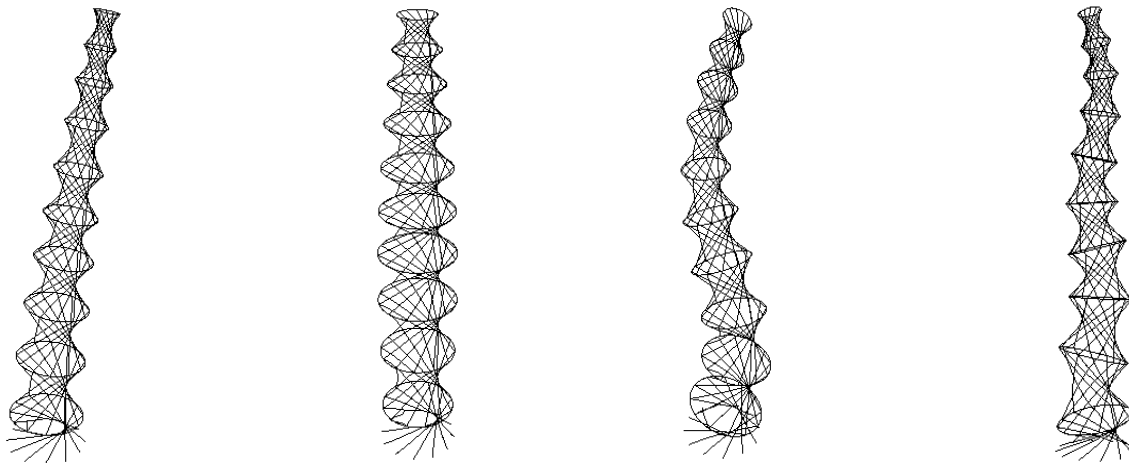


Рис. 7

В третьей главе представлены результаты исследования процесса нестационарного деформирования упругих стержней и цилиндрических оболочек при продольном мгновенном приложении силы. Обсуждаются особенности применения к рассматриваемым задачам комбинированного численно-аналитического метода и численного метода конечных разностей. Дается их сравнение. Для численной реализации написаны специальные прикладные программы.

В первом параграфе третьей главы приводится постановка задачи. В некоторый начальный момент времени к торцу элементов конструкций типа стержней или цилиндрических оболочек прикладывается продольная сила по закону:

$$P(\tau) = P_0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1, \quad P(\tau) = 0, \quad \tau > \tau_1, \quad (15)$$

где τ_1 - безразмерное время действия силы на торце стержня, которая может привести к изгибу указанных элементов, параметр времени τ введён по формуле $\tau = ct/L$, где t - физическое время, c - скорость звука в материале, L - длина стержня. Напряжения, возникающие в элементах, не превосходят предел пропорциональности материала.

Дифференциальные уравнения продольно-поперечных движений стержней приняты в записи Гордиенко Б.А. Частные случаи этих уравнений обсуждались в работах Вольмира А.С., Кильдибекова И.Г., Huffington N.

$$\ddot{u}_{\tau\tau} = u''_{\xi\xi} + [0,5((w'_\xi)^2 - (w_0'{}'_\xi)^2) - k(w'_\xi - \alpha)w'_\xi]'; \quad (16)$$

$$\dot{w}_{\tau\tau} = k(w'_\xi - \alpha)' + (u'_\xi w'_\xi)' + [0,5((w'_\xi)^2 - (w_0'{}'_\xi)^2)w'_\xi]'; \quad (17)$$

$$\ddot{\alpha}_{\tau\tau} = (\alpha - \alpha_0)''_{\xi\xi} + k\lambda^2(w'_\xi - \alpha), \quad (18)$$

здесь введены следующие обозначения: $\xi = x/L$, $u = \bar{u}/L$, $w = \bar{w}/L$, $w_0 = \bar{w}_0/L$, $c = \sqrt{E/\rho}$, $\lambda = L/i$, $i = \sqrt{I/F}$, где x , ξ , \bar{u} , u , \bar{w} , w , \bar{w}_0 , w_0 , α , α_0 - размерные и безразмерные продольные координаты, продольные перемещения, прогибы, начальные прогибы, угловое и начальное угловое перемещения соответственно; E , ρ - модуль упругости и плотность материала соответственно; λ - гибкость стержня; F , I - площадь и момент инерции сечения стержня соответственно; k - коэффициент сдвига.

Начальные и граничные условия принимаются в виде:

$$u'(0, \tau) = -P(\tau)/FE; \quad u(1, \tau) = 0; \quad u(\xi, 0) = 0; \quad \dot{u}(\xi, 0) = 0; \quad (19)$$

$$w(\xi, 0) = w_0(\xi); \quad \dot{w}(\xi, 0) = 0; \quad w(0, \tau) = w_0(0) = 0; \quad w(1, \tau) = w_0(1) = 0; \quad (20)$$

$$\alpha(\xi, 0) = \alpha_0(\xi); \quad \dot{\alpha}(\xi, 0) = 0; \quad (\alpha - \alpha_0)' = 0, \quad \xi = 0; \quad (\alpha - \alpha_0)' = 0, \quad \xi = 1. \quad (21)$$

Во втором параграфе третьей главы приводится аналитическое решение дифференциального уравнения продольных движений в предположении, что при продольном приложении импульса силы в начальный период неустановившегося движения прогибы стержня сравнительно невелики, изгибные и сдвиговые деформации незначительно влияют на напряженно-деформированное состояние по длине стержня. Это позволяет в уравнении (16) пренебречь в правой части изгибными и сдвиговыми слагаемыми и уравнение

движения (16) проинтегрировать независимо от двух других с использованием преобразования Лапласа. «Упрощенное» уравнение (16) использовалось в работах Вольмира А.С., Гордиенко Б.А., Кильдибекова И.Г., Малого В.И. и др. Последовательное применение теорем комплексного анализа позволяет найти для продольных перемещений решение уравнения (16) в сходящихся рядах. С помощью этого решения для импульсов разной продолжительности исследован процесс изменения продольных усилий в стержне в зависимости от продольной координаты и времени.

В третьем параграфе третьей главы на основе системы дифференциальных уравнений движения (16), (17), (18) (без «упрощения» уравнения (16)) методом конечных разностей проводится исследование поведения упругих стержней под действием прямоугольного импульса силы. Производные представляются через центральные разности, что обеспечивает высокую степень аппроксимации порядка δ^2 , где δ - шаг сетки по пространственной координате. Значения искомых функций в законтурных точках на каждом временном слое определяются методом простых итераций решения нелинейных уравнений. Устойчивость метода обеспечивается надлежащим выбором шагов сетки. Для того чтобы начать счёт вводился начальный прогиб по одной, трём, пяти полуволнам синусоиды. Амплитуда начального прогиба изменялась в широких пределах, при этом максимальная амплитуда начального прогиба $A_{\max} \leq 0,1h$, где h - толщина стержня. Гибкость менялась от $\lambda = 100$ до $\lambda = 600$. Полученный характер движения как качественно, так и количественно (по количеству полуволн выпучивания) совпадает с результатами работы Гордиенко Б.А., в которой была решена задача о поведении стержней при продольном ударе абсолютно твердым телом. Отмечается, что поперечное волнообразование отстаёт от быстро меняющегося напряжённого состояния по длине стержня.

В четвёртом параграфе третьей главы рассмотрена возможность применения численно-аналитического метода при исследовании продольно – поперечных движений стержней. Если выражением, стоящим в квадратных скобках в правой части уравнения (16) можно пренебречь, то становится возможным произвести раздельное интегрирование исходной системы уравнений численно-аналитическим методом, который заключается в аналитическом интегрировании уравнения продольных движений и численном интегрировании других уравнений системы. Система дифференциальных уравнений (17), (18) без кубических членов интегрируется методом конечных разностей. Значения функций в законтурных точках удаётся найти аналитически. Интересно провести сравнение результатов расчетов, проделанных численным и численно-аналитическим методами. Вычисления проводились для различных значений приложенной нагрузки, гибкостей

стержней, величин максимальной амплитуды и количества полуволн начального прогиба. Например, стержень круглого сечения диаметром $d = 0,1$ м с характеристиками $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu = 0,3$, $\lambda = 500$, с начальной погибью вида $w_0(\xi) = A \sin(m\pi\xi)$. В начальный момент времени на торце стержня мгновенно прикладывалась сила, соответствующая напряжению $\sigma = 200$ МПа. На рис. 8 стержень первоначально был изогнут по одной полуволне, $A = 0,01$ м, $\tau_1 = 10$. На рис. 9 стержень первоначально был изогнут по трем полуволнам, $A = 0,005$ м, $\tau_1 = 20$. В каждой паре кривых одна кривая получена методом конечных разностей, другая кривая численно-аналитическим методом. По графикам видно, что решения полученные двумя методами практически совпадают.

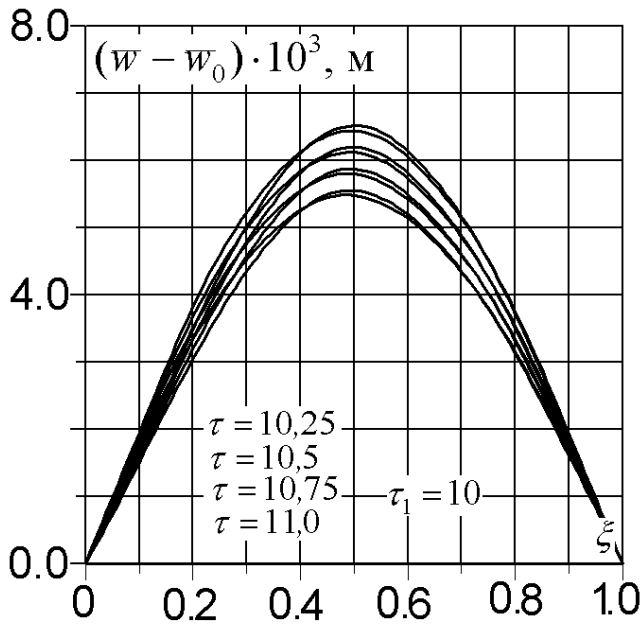


Рис. 8

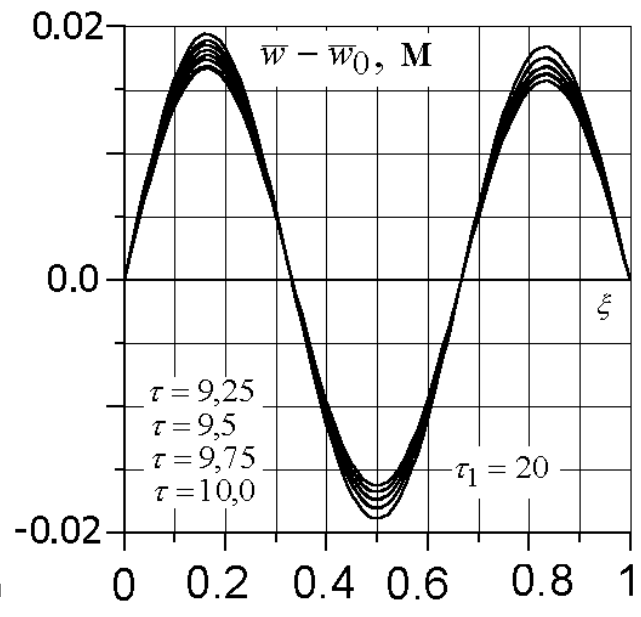


Рис. 9

В пятом параграфе третьей главы приводится постановка задачи и уравнения осесимметричных продольно – поперечных движений упругих цилиндрических оболочек под действием продольно приложенной силы $P(\tau)$ вида (15). Безразмерные уравнения движения, начальные и граничные условия принимаются в виде:

$$\ddot{u}_{\tau\tau} = \ddot{u}_{\xi\xi} - [\mu l / R \cdot w'_\xi + w'_\xi w''_{\xi\xi}]; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{\tau\tau} = & w''_{\xi\xi} (0,5k^2(1-\mu) + u'_\xi - (l\mu w)/R) + 0,5k^2(1-\mu)\psi'_\xi - 0,5\mu l/R (w'_\xi)^2 + \\ & + \mu l/R u'_\xi - l^2/R^2 w + w'_\xi u''_{\xi\xi}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\psi''_{\xi\xi} - 6k^2(1-\mu)l^2/h^2 (w'_\xi + \psi) - \ddot{\psi}_{\tau\tau} = 0. \quad (24)$$

$$u(1, \tau) = 0; \quad u(\xi, 0) = 0; \quad \dot{u}(\xi, 0) = 0;$$

$$\sigma^* = -[u'_\xi - w/R + 0,5(w'_\xi)^2], \quad \sigma^* = P(1-\mu^2)/(2\pi ERh) \quad (25)$$

$$w(\xi, 0) = 0; \quad \dot{w}(\xi, 0) = 0; \quad w(0, \tau) = 0; \quad w(1, \tau) = 0; \quad (26)$$

$$\psi(\xi, 0) = 0; \quad \dot{\psi}(\xi, 0) = 0; \quad \psi(0, \tau) = 0; \quad \psi(1, \tau) = 0. \quad (27)$$

Здесь введены следующие обозначения: $u = \bar{u}/l$; $w = \bar{w}/l$, где \bar{u} , \bar{w} , ψ - физические продольное, поперечное, угловое перемещения; R , h - радиус и толщина оболочки; E , μ - модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; K - коэффициент сдвига теории Тимошенко, l - длина оболочки.

Принимая использованное ранее для стержней предположение о малом влиянии прогибов на распространение продольных волн, уравнение (22) может быть «упрощено» - оно записывается без слагаемого в квадратных скобках. Тогда между «упрощенными» уравнениями (16) и (22) усматривается полная математическая аналогия и, следовательно, уравнение (22) допускает аналитическое решение в рядах, система уравнений движения (22)-(24) может быть решена численно-аналитическим методом. При этом два других уравнения системы (23),(24), как и ранее, решаются методом конечных разностей. Проведённые расчёты показывают, что в общем случае картина волнообразования носит достаточно сложный характер и зависит как от величины, характера сжимающей нагрузки, так и от времени ее действия. Картина прогибов носит явно волновой характер. При малых временах (два-три пробега волны) тонкие оболочки оказываются более чувствительными по сравнению со стержнями к изменениям напряженного состояния по их длине.

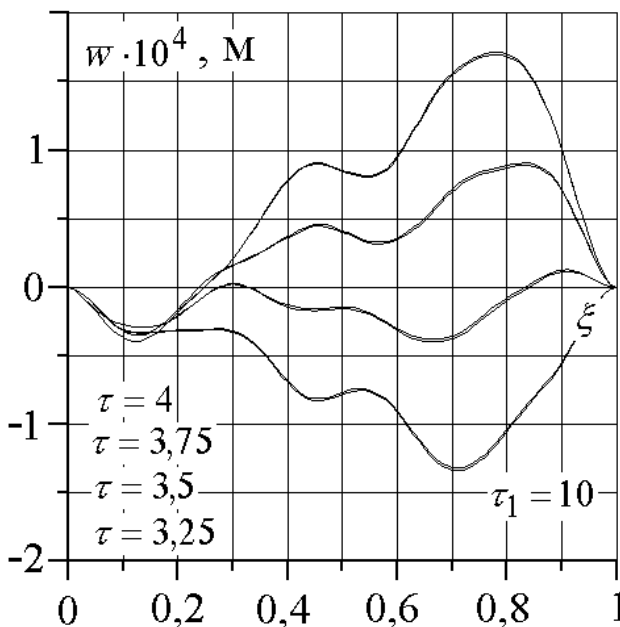


Рис. 10.

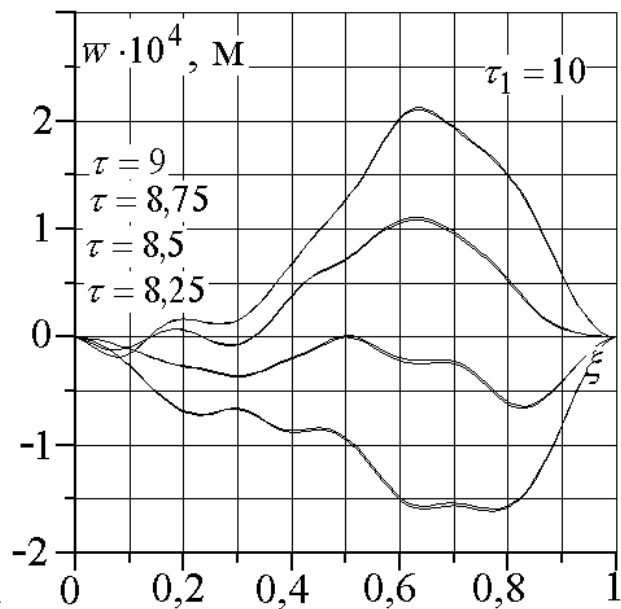


Рис. 11.

В шестом параграфе третьей главы для исследования осесимметричного выпучивания цилиндрической оболочки используется полная система уравнений (22)-(24) без «упрощения» уравнения (22). Интегрирование ведется методом конечных разностей. Проводится сравнение с результатами,

полученным по численно-аналитическому методу. Для этого в широких пределах варьируется время приложения нагрузки и её величина для цилиндрических оболочек с разными механическими и геометрическими характеристиками. Было найдено, что заметной качественной и количественной разницы между двумя подходами не наблюдается. На рис. 10, 11 приведены, полученные двумя подходами, графики прогибов для оболочки с характеристиками: $h = 0,03 \text{ м}$, $R = 1 \text{ м}$, $l = 2 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0,3$, $k^2 = 8/9$, $\tau_1 = 10$, $\sigma_0 = 4 \cdot 10^7 \text{ Па}$ – напряжение на торце оболочки в течении времени действия импульса.

Основные результаты и выводы:

Работа посвящена исследованию с помощью метода конечных элементов и метода конечных разностей динамических характеристик тонкостенных и стержневых конструкций произвольной геометрии. При этом были получены следующие основные результаты.

1. На основе 9-ти узлового изопараметрического конечного элемента оболочек и трёхузлового изопараметрического конечного элемента бруса построена конечно-элементная схема динамического расчёта произвольных стержневых и тонкостенных конструкций. Построенная схема позволяет решать задачи определения частот и форм собственных колебаний указанных конструкций, а также находить динамические характеристики при вынужденных колебаниях, для чего используется неявная схема метода Ньюмарка.
2. Приведены многочисленные результаты тестирования задач о динамическом поведении тонкостенных и стержневых конструкций с использованием аналитических решений, численных результатов других авторов, проведено согласование с результатами экспериментальных работ.
3. Проведено исследование динамических характеристик пространственных стержневых и тонкостенных конструкций, имеющих практическое назначение МКЭ, с определением частот и форм собственных колебаний. Результаты расчёта и методика исследования введены в действие на кафедре металлических конструкций и испытаний сооружений Казанской государственной архитектурно-строительной академии.
4. Разработан численно-аналитический метод расчёта изотропных стержней и цилиндрических оболочек при продольном ударе с учётом геометрической нелинейности, заключающийся в раздельном интегрировании уравнений

движения с применением аналитического решения для продольных перемещений.

5. С использованием явной конечно-разностной схемы исследуется поведение изотропных цилиндрических оболочек и стержней при импульсном нагружении. При этом рассматривались мгновенно приложенные нагрузки разной амплитуды и продолжительности. Получены численные решения на длительных интервалах времени. Проведено сравнение с результатами, полученными численно-аналитическим методом.

В ходе работы над диссертацией был получен диплом II степени на Республиканском конкурсе научных работ среди студентов и аспирантов на соискание премии им. Н.И. Лобачевского (2002 г.) Работа была поддержана грантом Министерства Образования (2003 г.)

Публикации по теме диссертации

1. Шигабутдинов А.Ф. Устойчивость стержня при продольном динамическом сжатии / Шигабутдинов А.Ф. // Тез. докл. Всеросс. научн. студ. конф. - Казань, 1998. – С. 67-68.
2. Шигабутдинов А.Ф. Устойчивость упругих стержней при импульсном нагружении / Шигабутдинов А.Ф. // Тр. межд. конф. Актуальные проблемы механики оболочек. - Казань, 2000. - С. 428-432.
3. Шигабутдинов А.Ф. Продольные волны в стержне конечной длины / Шигабутдинов А.Ф. // Тез. докл. Межд. молод. конф. - Н. Челны, 2000. – С. 5-6.
4. Шигабутдинов А.Ф. Динамика стержней / Шигабутдинов А.Ф. // Материалы межд. конф. студентов и аспирантов по фундам. наукам. - Москва, МГУ 2000. - С. 341-342.
5. Шигабутдинов А.Ф. К вопросу об устойчивости упругих элементов типа стержней и цилиндрических оболочек под действием продольного импульса силы / Жигалко Ю.П., Шигабутдинов А.Ф. // Аннот. докл. VIII Всеросс. съезда по теор. и прикл. механике. - Пермь, 2001. - С.259.
6. Шигабутдинов А.Ф. Реакция стержней и цилиндрических оболочек на продольно-приложенный импульс силы / Шигабутдинов А.Ф. // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике: Сб. ст. – Минск, 2001. - С. 476-480.
7. Шигабутдинов А.Ф. Реакция упругих элементов типа стержней и цилиндрических оболочек под действием продольного импульса силы / Шигабутдинов А.Ф. // Тр. матем. центра им. Н.И.Лобачевского, Т. 12. Казань, 2001. - С. 125.

8. Шигабутдинов А.Ф. Анализ влияния прогибов на распространение продольной волны в цилиндрической оболочке / Жигалко Ю.П., Шигабутдинов А.Ф. // Тез. докл. VIII Четаевской межд. конф. – Казань, 2002. – С. 317.
9. Шигабутдинов А.Ф. Исследование численным методом нестационарных задач динамики упругих стержней и оболочек / Жигалко Ю.П., Шигабутдинов А.Ф. // Проблемы прочности и пластичности: Сб. ст. – Н.Новгород, 2002. – вып. 64, С. 66-71.
10. Шигабутдинов А.Ф. Реакция цилиндрической оболочки на продольно приложенный импульс силы / Шигабутдинов А.Ф. // Сб. тез. итог. конф.: Республиканский конкурс научных работ среди студентов и аспирантов на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. – Казань, 2002. – С. 202-203.
11. Шигабутдинов А.Ф. Выпучивание упругих стержней и цилиндрических оболочек под действием прямоугольного импульса силы / Жигалко Ю.П., Шигабутдинов А.Ф. // Изв. высш. уч. завед. Авиационная техника. – 2003. – №4. – С. 7-10.
12. Шигабутдинов А.Ф. Исследование нестационарного деформирования оболочек МКЭ / Шигабутдинов А.Ф. // Матер. конф. Наука и практика. Диалоги нового века. – Н. Челны, 2003. – С.118-119.
13. Шигабутдинов А. Ф. Исследование динамического поведения оболочек МКЭ / Голованов А.И., Шигабутдинов А.Ф. // Тез. докл. зимн. школы по механике сплошных сред. – Пермь, 2003. – С. 110.
14. Шигабутдинов А.Ф. Расчёт динамического поведения оболочек произвольной геометрии МКЭ / Голованов А.И., Шигабутдинов А.Ф. // Сб. докл. научно-практич. конф. – Казань, КГУ, 2003. – С. 35-37.
15. Шигабутдинов А.Ф. Расчёт оболочек произвольной геометрии на собственные колебания МКЭ / Голованов А.И., Шигабутдинов А.Ф. // Тр. межд. конф. "Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике", т. 5. Ульяновск, 2003. – С. 48-50.
16. Шигабутдинов А. Ф. К расчёту свободных колебаний тонкостенных конструкций / Голованов А.И., Шигабутдинов А.Ф. // Тр. 13-й межвуз. конф. – Самара, 2003. – Ч.1. – С. 28-32.
17. Шигабутдинов А.Ф. Расчёт тонкостенных конструкций на свободные колебания методом конечных элементов / Газимов М.М., Голованов А.И., Шигабутдинов А.Ф. // Сб. матер. XV Всеросс. межвуз. научно-технич. конф. - Казань, 2003. – Ч.1. - С. 328-329.
18. Шигабутдинов А.Ф. Решение задач динамики стержневых конструкций МКЭ / Голованов А.И., Шигабутдинов А.Ф., Якушин С.А. // Тр. 5-ой Междун. конф. Математическое моделирование физических,

экономических, технических, социальных систем и процессов. - Ульяновск, УлГУ, 2003. - С. 58-60.

19. Шигабутдинов А.Ф. Исследование нелинейного статического и динамического деформирования оболочек малой и средней толщины МКЭ / Голованов А.И., Коноплёв Ю.Г., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф., Якушин С.А. // Тр. XX Межд. конф. ВЕМ-FEM. - С.-Петербург, 2003. - Т. 2. - С. 134-139.
 20. Шигабутдинов А.Ф. К определению динамических характеристик оболочечных конструкций МКЭ / Шигабутдинов А.Ф. // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2003. – С. 239.
 21. Airat F. Chigaboutdinov. The analysis of influence of sags on propagation of a longitudinal wave in a cylindrical shell / Airat F. Chigaboutdinov // Book of Abstracts. XXX Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. - St. Petersburg, 2002. - p. 35.
 22. Airat F. Chigaboutdinov. Finite elements study of dynamic shell announcing / Airat F. Chigaboutdinov // Book of Abstracts. XXXI Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. - St. Petersburg, 2003. - p. 33.
-

